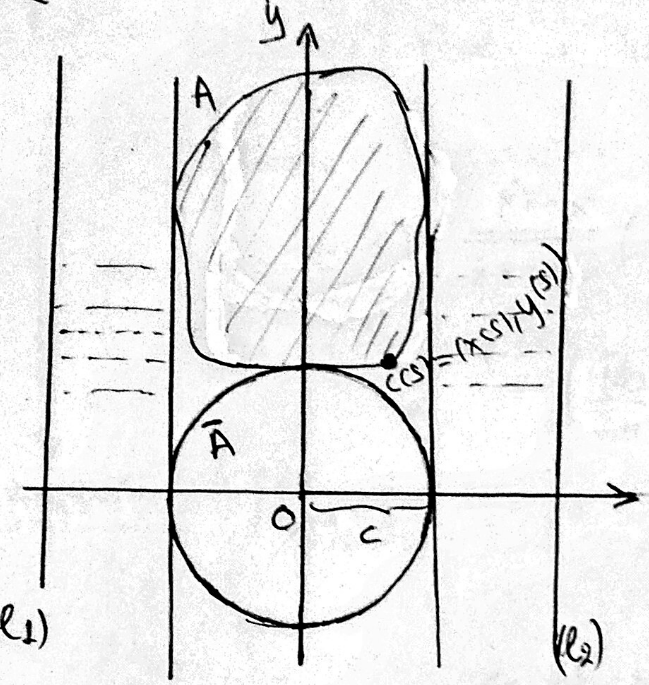
Ολική Διαφορική Γεωμετρία

08/03/2018

Απόδειξη Θεωρήματος Ισοπεριμετρικής Ανισότητας:

Παίρνω ένα συμπαγές σύνολο, τότε αυτό θα βρίσκεται μέσα στη ζώνη 2 παραλλήλων ευθειών. Μεταφέρω τις ευθείες μέχρι να εφάπτονται στο σύνολο



$c(s)=(x(s),y(s))$, $s\in[0,L]$ όπου s μήκος τόξου για την c (δεν χρειάζομαι για την $\bar{c}$)

άρα $(\dot{x})^2+(\dot{y})^2=1$.

Η $\bar{c}$ είναι κύκλος κέντρου O και ακτίνας $r=\frac{d(\ell_1,\ell_2)}{2}$.

Παραμετρώ τον κύκλο $\bar{c}$ έτσι ώστε $\bar{c}(s)=(\bar{x}(s),\bar{y}(s))$ με $\bar{x}(s)=x(s)$

$$\bar{c}:\ \bar{x}^2+\bar{y}^2=r^2 \iff \boxed{x^2+\bar{y}^2=r^2}$$

Άρα $A=\int_0^L x(s)\dot{y}(s)\,ds$, $\bar{A}=-\int_0^L \dot{\bar{x}}(s)\,\bar{y}(s)\,ds$ (από Green..)

$$A+\bar{A}=\int_0^L \left(x(s)\dot{y}(s)-\dot{x}(s)\bar{y}(s)\right)ds \le \int_0^L |x(s)\dot{y}(s)-\dot{x}(s)\bar{y}(s)|\,ds \overset{\text{Ανισότητα C-S}}{\le}$$

$$\le \int_0^L r\,ds = Lr$$

Γιατί: έστω $(x,\bar{y})$, $(\dot{y},-\dot{x})$

$|x\dot{y}-\dot{x}\bar{y}|\le\sqrt{x^2+\bar{y}^2}\cdot\sqrt{\dot{y}^2+\dot{x}^2}\le r$

Επιπλέον χρησιμοποιώ: $a,b>0$ τότε $2\sqrt{ab}\le a+b$ οπότε

$$\underline{2\sqrt{A}\cdot\sqrt{\pi r^2}}\le A+\pi r^2\le\ldots\le \underbrace{Lr}$$

$$\hookrightarrow 2\sqrt{A}\cdot\sqrt{\pi}\,\cancel{r}\le L\cancel{r} \iff 4\pi A\le L^2 \text{ (Αυτό που θέλω να δείξω)}$$

$\rightarrow \longrightarrow$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Έστω $L^2 = 4\pi A$. Τότε όλες οι ανισότητες γίνονται ισότητες δηλαδή

✓ $x\dot{y} - \dot{x}\bar{y} \geq 0$

✓ $x = \mu\dot{y}\,,\ \bar{y} = -\mu\dot{x}$

✓ $\mu = r$

Επιπλέον ισχύει $c: \vec{t} = (\dot{x}, \dot{y})$

$$\bar{c}: \vec{\bar{t}} = \frac{1}{r}(-\bar{y}, \bar{x}) = \frac{1}{r}(-\bar{y}, x) \xlongequal[\bar{y} = -r\dot{x}]{x = r\dot{y}} (\dot{x}, \dot{y})$$

(δηλαδή $\vec{t}, \vec{\bar{t}}$ ίδια)

επίσης $\bar{s}$ μήκος τόξου της $\bar{c}$ τότε $\vec{\bar{t}} = \left(\frac{dx}{d\bar{s}}, \frac{d\bar{y}}{d\bar{s}}\right)$

δηλαδή $\frac{dx}{d\bar{s}} = \frac{dx}{ds} \Rightarrow \frac{d\bar{s}}{ds} = 1.$

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{s}} = \frac{dy}{ds} \Leftrightarrow \frac{ds}{d\bar{s}} \cdot \frac{d\bar{y}}{ds} = \frac{ds}{dy} \Rightarrow \frac{d\bar{y}}{ds} = \frac{dy}{ds} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \bar{y} = y + y_0\,,\quad y_0 = \text{σταθ.}$

$x^2 + \bar{y}^2 = r^2 \Leftrightarrow \boxed{x^2 + (y+y_0)^2 = r^2}$ δηλαδή επαληθεύεται η εξίσωση του κύκλου

Τώρα θα κάναμε άλλη απόδειξη απόδειξη που θα χρειαστεί η ισότητα (ανισότητα Wirtinger) που έλεγε ότι χρειάζονται οι σειρές Fourier

Έστω $C(\mathbb{R})$ = χώρος 2π-περιοδικών συναρτήσεων

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x)\, dx$$

$$\|f\| = \left(\int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx\right)^2. \quad , \quad \frac{\cos(\pi n x)}{\sqrt{\pi}}\,,\ \frac{\sin(\pi n x)}{\sqrt{\pi}}\,, n \in \mathbb{N}$$

<u>Θεωρία Fourier</u>: Έστω 2π-περιοδική συνάρτηση με $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\pi n x) + b_n \cdot \sin(\pi n x))$$

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

<u>Λήμμα Wirtinger</u>: Έστω f λεία 2π-περιοδική συνάρτηση με

$\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$, τότε ισχύει:

$$\int_0^{2\pi} (f'(x))^2 dx \geq \int_0^{2\pi} f^2(x)dx$$ και η ισότητα ισχύει $\Leftrightarrow f(x) = a\cos x + b\sin x$

<u>Απόδειξη</u>: $\int_0^{2\pi} f^2(x)dx = \|f\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\pi n x) + b_n \sin(\pi n x)) \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi n (a_n(-\sin(\pi n x)) + b_n \cos(\pi n x))$$

Ας επανέλθουμε στην αρχική απόδειξη:

$L^2 \geq 4\pi A$ και $L^2 = 4\pi A \leftrightarrow$ η καμπύλη είναι κύκλος

L: μήκος καμπύλης.

Θεωρώ r ώστε $L = 2\pi r$. Έχω 2 περιπτώσεις:

1η) $r = 1$, δηλαδή $L = 2\pi$.

Έστω $c(s) = (x(s), y(s))$

<u>Κέντρο βάρους</u>: $\frac{1}{L}\left(\int_0^L x(s)ds, \int_0^L y(s)ds\right)$ πηγαίνω σε αυτό το σημείο και το επιλέγω να είναι η αρχή του συστήματος συντεταγμένων

άρα $\frac{1}{L}\left(\int_0^L x(s)ds, \int_0^L y(s)ds\right) = (0,0)$

δηλαδή $\int_0^{2\pi} x(s)ds = 0$ ⟶ ⟶

$$2\pi = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s)}\, ds = \int_0^{2\pi} (\dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s))\, ds$$

$$A = \int_0^{2\pi} x(s)\dot{y}(s)\, ds$$

Υπολογίζω την ποσότητα: $2(\pi - A) = 2\pi - 2A =$

$$= \int_0^{2\pi} \left((\dot{x}(s))^2 + (\dot{y}(s))^2 - 2x(s)\dot{y}(s) \right) ds =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left((\dot{x}(s))^2 - (x(s))^2 + (x(s) - \dot{y}(s))^2 \right) ds =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\dot{x}(s))^2 ds - \int_0^{2\pi} (x(s))^2 ds + \int_0^{2\pi} (x(s) - \dot{y}(s))^2 ds \geq 0 \; . \; \ldots$$

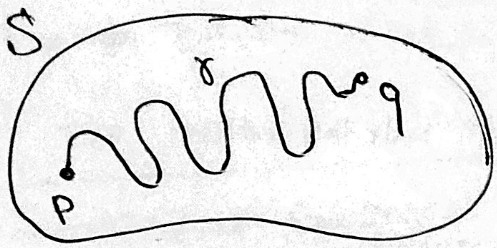
(2η) Έστω $r \neq 1$

Τότε βάζω $r = \frac{1}{2\pi}$ και κάνω ό,τι στην (1η)

$\bar{L} = 2\pi$

οπότε ανάγομαι στην (1η) περίπτωση.

Πρόβλημα ελαχιστοποίησης του μήκους για καμπύλες σε επιφάνειες



Δίνεται η κανονική (συνεκτική) επιφάνεια S και $p, q \in S$

$\exists$ καμπύλη γ της S με άκρα τα p και q ώστε

$L(\gamma) \leq L(c)$, $\forall$ καμπύλη c της S με τα ίδια άκρα

Ερώτημα: Πως γνωρίζω ότι υπάρχουν και αν υπάρχουν ποιές είναι?

Απάντηση: Είναι ευθείες $(K=0)$ ή παραμετρώντας τις ευθείες

$\gamma(t) = p + tv$, $\gamma'(t) = v$, $\gamma''(t) = 0$

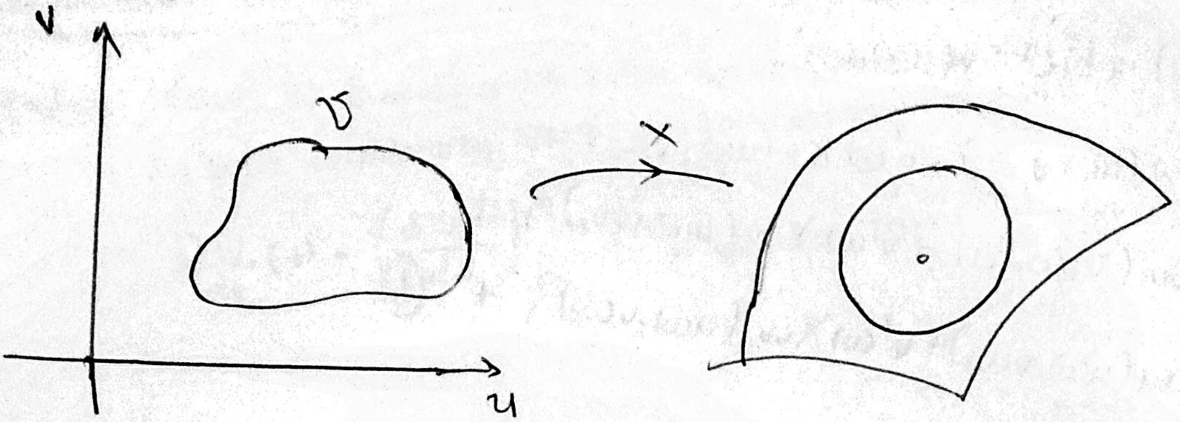
Εφόσον έχω πρόβλημα ελαχιστοποίησης του μήκους πρέπει να βρω
ελάχιστα είναι. Στον απει θα έπρεπε να βρω κρίσιμα σημεία και να δω
να ανήκουν στην επιφάνεια. Άρα είναι αναγκαίο να παραγωγίσω.
όμως τι? Την απάντηση θα μας δώσουν τα διανυσματικά πεδία.

$\longrightarrow$

Διανυσματικά Πεδία σε Επιφάνειες

Ορισμός: Καλούμε διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο V μιας κανονικής επιφάνειας S κάθε διαφορίσιμη απεικόνιση $V: S \to \mathbb{R}^3$ τω $V(p) \in T_pS$, $\forall p \in S$

Είναι γνωστό ότι:



$\forall p \in X(U)$

$V \circ X = aX_u + bX_v$

$a, b : U \to \mathbb{R}$.

Κάθε διανυσματικό πεδίο γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός της βάσης του συστήματος συντεταγμένων.

Για να μπορέσω να παραγωγίσω διανυσματικό πεδίο θα πρέπει να ξέρω την κατεύθυνση παράγωγο.

Συναλλοίωτη Παράγωγος διανυσματικού πεδίου

Ορισμός: Έστω V διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο σε μια κανονική επιφάνεια S. Για $p \in S$ και $w \in T_pS$ ορίζω την συναλλοίωτη παράγωγο του V στην διεύθυνση w ως εξής:

Θεωρώ καμπύλη $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ με $c(0) = p$, $c'(0) = w$

$V \circ c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ και συναλλοίωτη το διάνυσμα:

$$D_w V = \left((V \circ c)'(0) \right)_{T_pS} = \text{προβολή του } (V \circ c)'(0) \text{ στο } T_pS$$

$\rightsquigarrow$

Ιδιότητες

είναι γραμμική $D_w(v_1+v_2) = D_w V_1 + D_w V_2$.

$$D_w(fV) = f(p) D_w V + d f_p(w) V(p)$$

δηλαδή $V \circ c(t) = V(\chi(u(t), v(t))) = V \circ \chi(u(t), v(t)) =$

$= \alpha(u(t), v(t)) X_u(u(t), v(t)) + b(u(t), v(t)) X_v(u(t), v(t)) =$

$= a(t) X_u(u(t), v(t)) + b(t) X_v(u(t), v(t))$

$\Rightarrow (V \circ c)'(0) = a'(0) X_u(u(0), v(0)) + b'(0) X_v(u(0), v(0)) +$

$+ a(0)\{u'(0) X_{uu}(u(0), v(0)) + v'(0) X_{uv}(u(0), v(0))\} +$ (1)

$+ b(0)\{u'(0) X_{vu}(u(0), v(0)) + v'(0) X_{vv}(u(0), v(0))\}$

$\{X_u, X_v, N\}$.

$$\left.\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN \\ X_{uv} = X_{vu} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN \\ X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN \end{aligned}\right\}$$

αυτά θα πρέπει να αντικατασταθούν στον τύπο (1)

$$D_w V = \{a'(0) + a(0) u'(0) \Gamma_{11}^1 + a(0) v'(0) \Gamma_{12}^1 + \dots + b(0) u'(0) \Gamma_{12}^1 + b(0) v'(0) \Gamma_{22}^1\} X_u +$$

$$+ \{b'(0) + a(0) u'(0) \Gamma_{21}^2 + a(0) v'(0) \Gamma_{12}^2 + \dots + b(0) u'(0) \Gamma_{12}^2 + b(0) v'(0) \Gamma_{22}^2\} X_v$$

Διανυσματικά πεδία κατά μήκος επιφανειακής καμπύλης

<u>Ορισμός</u>: Έστω $c: I \to S$ καμπύλη της επιφάνειας S. Καλούμε διανυσματικό πεδίο της S κατά μήκος της c κάθε λεία απεικόνιση

$W: I \to \mathbb{R}^3$ τω $W(t) \in T_{c(t)}S$

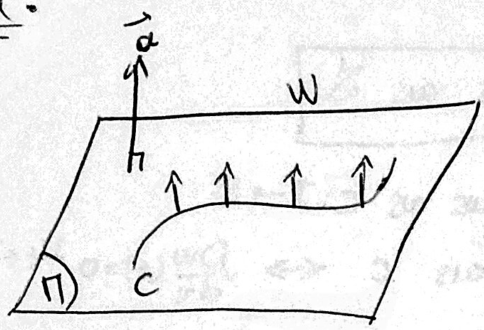
Συναλλοίωτη Παράγωγος Διανυσμ. Πεδίων κατά μήκος Καμπύλης

<u>Ορισμός</u>: Έστω W διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της $c: I \to S$. Καλούμε συναλλοίωτη παράγωγο το διανυσματικό πεδίο

$$\frac{DW}{dt}(t) = \left(\frac{dW(t)}{dt}\right)^{T_{c(t)}S}$$ = προβολή του $\frac{dW(t)}{dt}$ στο $T_{c(t)}S$

<u>Παράδειγμα</u>:

(1) Επίπεδο



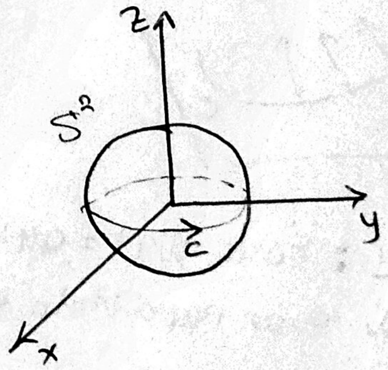
$$\frac{DW}{dt} = W' = \frac{dW}{dt}$$

ισχύει $\langle W(t), a\rangle = 0$

$\langle W'(t), a\rangle = 0$

δηλαδή για $\gamma: I \to (\Pi)$

Γνωρίζω ότι είναι ευθεία. $\leftrightarrow \gamma'(t) = \text{σταθ} \leftrightarrow \gamma''(t) = 0 \leftrightarrow \frac{D\gamma'}{dt} = 0$



(2) $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2=1\}$

$c: \mathbb{R} \to S^2$

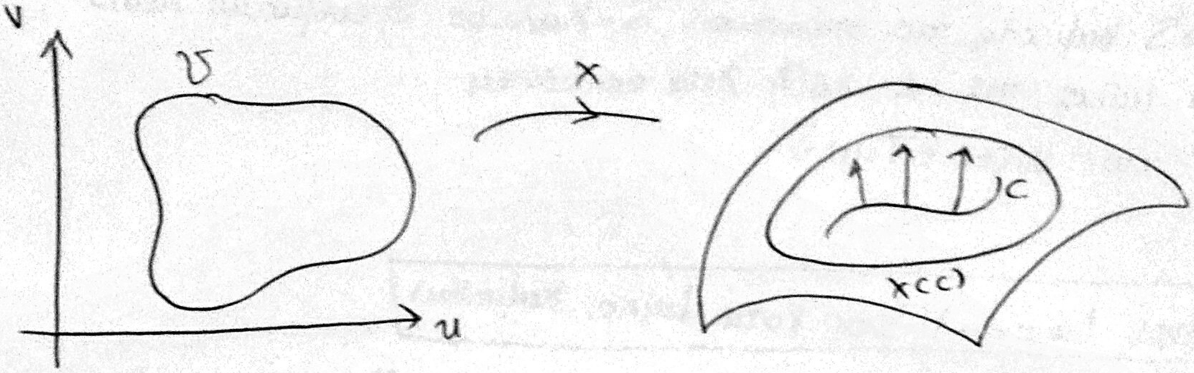
$c(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ μέγιστος κύκλος

$c'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$

$$\frac{Dc'}{dt}(t) = (c''(t))^{T_{c(t)}S^2} = -(\cos t, \sin t, 0)^{T_{c(t)}S} = 0$$

(Παρατηρώ ότι η επιτάχυνση σε αυτές τις καμπύλες δλδ η συναλλοίωτη πρέπει και είναι 0)

Έκφραση Συναλλοίωτης Παραγ:



$$c(t) = X(u(t), v(t))$$

$$W(t) = a(t) X_u(u(t), v(t)) + b(t) X_v(u(t), v(t))$$

οπότε $\dfrac{Dw}{dt} = \left\{ a' + a u' \Gamma_{11}^1 + a v' \Gamma_{12}^1 + b u' \Gamma_{12}^1 + b v' \Gamma_{22}^1 \right\} X_u +$

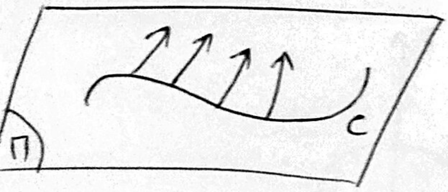
$$+ \left\{ b' + a u' \Gamma_{11}^2 + a v' \Gamma_{12}^2 + b u' \Gamma_{12}^2 + b v' \Gamma_{22}^2 \right\} X_v.$$

Παράλληλα διανυσματικά πεδία κατά μήκος της S

<u>Ορισμός</u>: Έστω W διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της $c: I \to S$

Το W καλείται παράλληλο κατά μήκος της c $\Leftrightarrow \dfrac{Dw}{dt}(t) = 0 \ \forall t \in I$

<u>Εφαρμογή</u>: W παράλληλο $\Leftrightarrow \dfrac{Dw}{dt} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{dW}{dt} = 0 \Leftrightarrow W = \text{σταθ.}$



<u>Πρόταση</u>: Έστω $W(t) = a(t) X_u(u(t), v(t)) + b(t) X_v(u(t), v(t))$

Το W είναι παράλληλο $\Leftrightarrow \begin{cases} a'(t) + a(t) u'(t) \Gamma_{11}^1 (u(t), v(t)) + \dots = 0 \\ b'(t) + a(t) u'(t) \Gamma_{11}^2 (u(t), v(t)) + \dots = 0 \end{cases}$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $c: I \to S$ και $w \in T_{c(t_0)} S$.

Τότε $\exists$ μοναδικό παράλληλο διανυσματικό πεδίο W κατά μήκος της c με $W(t_0) = w$

Το W καλείται παράλληλη μεταφορά του w.